Численные методы решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Задача Коши для диф. ур-ния первого порядка:

состояние объекта, системы

$$\frac{dv(x)}{dx} = v' = f(x, v), \quad \text{Н.У.: } v(x_0) = v_0 .$$

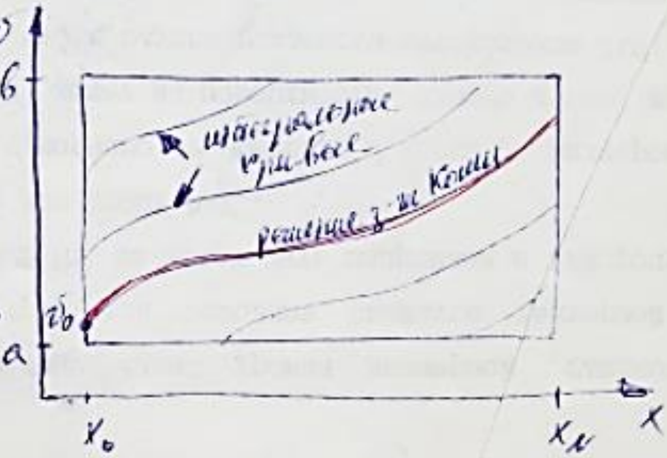
$x_0 \le x \le x_N$,

$a \le v(x) \le b \Rightarrow$

Область решения:

$D = (x_0, x_N) \times (a, b)$ - открытая обл.

$\overline{D} = [x_0, x_N] \times [a, b]$ - замкнутая



Теорема. Если $f(x,v)$ непрерывна в D и удовл-ет усл. Липшица,

$$|f(x,v) - f(x,w)| \le M|v-w|, \quad M - const > 0,$$

т.е. $f'_v \ne \infty$

то $\forall\, v_0 \in (a, b)$ $\exists$ единственное решение в $\overline{D}$,
(т.е. через $\forall$ • проходит только одна интегр. кривая)

Исходная з-ча очень часто встречается в приложениях. Для многих f заранее рассчитаны v и занесены в таблицы (аналогично $\sin$, $\ln$...) - это интегралы Френеля, ф-ции Бесселя и т.п. спец. ф-ции. Однако для многих з-ч решение $v(x)$ неизвестно $\Rightarrow$ необходимы числ. методы.

$\exists$ 2 группы числ. методов:

производную заменяют конечными разностями.

1 - разностные методы (методы Эйлера и Адамса);

2 - методы Рунге-Кутта, где f вычисляется не только в узлах x_i.
(ф-цию f-интегрируют по квадратурным ф-лам)

Введём равном. сетку $\omega_h = \{x_i = x_0 + ih,\ i = 0, 1, .., N,\ h = \frac{x_N - x_0}{N}\}$,

будем считать, что Теорема выполняется.

Метод Эйлера

(правой разностной производной)

Заменим производную v' ~~конечными~~ разностями в x_i:

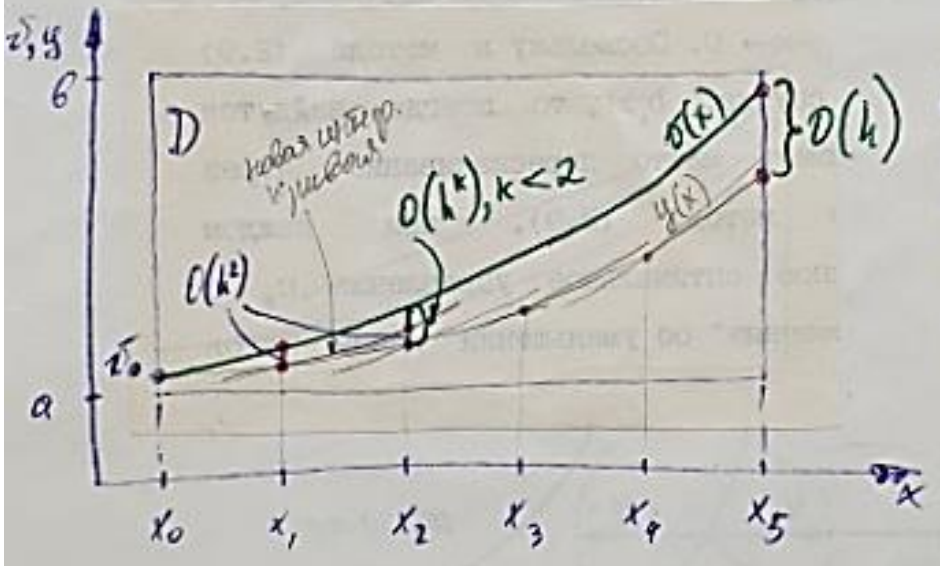
$$v'(x_i) = v_{x,i+1/2} - \frac{h}{2} v''(\xi_+) = f(x_i, v_i), \quad v_{x,i+1/2} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h}$$

$$\Rightarrow v_{i+1} = v_i + h f(x_i, v_i) + \frac{h^2}{2} v''(\xi_+)$$

$= O(h^2)$ при $h \to 0$ – локальная погрешность аппроксимации

v – точное решение, y – приближённое (отбрасываем $O(h^2)$) $\Rightarrow$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)}$$ – ф-ла Эйлера, $y_0 = v_0$.



Аналогично ~~...~~ квадратурным ф-лам суммарная погрешн. на порядок ниже частичной (локальной).

Т.о. точность метода Эйлера – $O(h)$, т.е. первый порядок.

~~...значение погрешности мы получим в квадратурных ф-лах.~~

~~Решение з-чи Коши можно записать в виде~~

Отсюда погрешность можно найти след. образом:

из точной ф-лы для v_{i+1}

$$|z| \le \sum_{i=1}^{N} \frac{h^2}{2} M_2, \quad \text{где } M_2 = \max_{[x_0, x_N]} |v''|$$

$$|z| \le \frac{h^2}{2} M_2 N = h M_2 (x_N - x_0) \frac{1}{2} = O(h) \text{ при } h \to 0$$